سلسلة اعمال موجهة رقم 3

تمرين 1. ليكن $(E, \|.\|_E)$, فضاءا بناخيا و $A \in \mathcal{L}(E)$ مؤثر محدود.

1. بين ان مجموعة القيم النظامية $\rho(A)$ للمؤثر A تشكل مجموعة مفتوحة من $\mathbb{C}$ ، استنتج ان طيف المؤثر $\sigma(A)$ مجموعة مغلقة.
2. بين انه اذا كان $\lambda \in \mathbb{C}$ و $\|A\| < |\lambda|$ فان λ قيمة نظامية. استنتج ان طيف المؤثر محدود.

تمرين 2. نذكر ان :

$$\ell^2_{\mathbb{N}}(\mathbb{R}) = \{x = (x_1, x_2, ..., x_n, ...) \subset \mathbb{R}; \quad \sum_{n\leq 1} |x_n|^2 < \infty\}$$

هو فضاء هيلبرتي مزود بالجداء السلمي: $\forall x, y \in \ell^2(\mathbb{R})_{\mathbb{N}} :< x,\ y >= \sum_{n\geq 1} x_n\, y_n$ ونظيمه : $\|x\|^2 = \sum_{n\geq 1} |x_n|^2$

نعرف المؤثر :

$$\begin{aligned} A: \qquad & \ell^2_{\mathbb{N}}(\mathbb{R}) \longrightarrow \ell^2_{\mathbb{N}}(\mathbb{R}) \\ x = (x_1, x_2, ..., x_n, ...) \mapsto & \ Ax = (0, x_1, x_2, ..., x_n, ...) \end{aligned}$$

1. بين ان؛ $\forall x \in \ell^2_{\mathbb{N}}(\mathbb{R}) : \|Ax\| = \|x\|$، استنتج ان : $\|A\| = 1$ و A متباين. هل المؤثر غامر؟ اين يكون طيف المؤثر.
2. احسب طيف المؤثر.

تمرين 3. ليكن $E = \ell^2_{\mathbb{N}}(\mathbb{C})$ و $(\lambda_n) \subset \mathbb{C}$ متتالية محدودة. نعرف المؤثر:

$$\begin{aligned} A: \qquad & \ell^2_{\mathbb{N}}(\mathbb{C}) \longrightarrow \ell^2_{\mathbb{N}}(\mathbb{C}) \\ x = (x_1, x_2, ..., x_n, ...) \mapsto & \ Ax = (\lambda_1 x_1, \lambda_2 x_2, ..., \lambda_n x_n, ...) \end{aligned}$$

1. بين ان: A خطي ومستمر ، ثم احسب نظيمه.
2. بين انه اذا كانت : (λ_n) محدودة من الاسفل بعدد موجب تماما فإن المؤثر تقابلي ثم احسب A^{-1} ونظيمه.
3. نفر ض ان احد حدود المتتالية (λ_n) معدوم. بين ان المؤثر ليس متباين ولا غامر و $\overline{Im(A)} \neq E$
4. نفرض ان $\forall n \geq 1,\ \lambda_n \neq 0$ و $\inf\{|\lambda_n|\ n \geq 1\} = 0.$. بين ان المؤثر متباين وليس غامر و $\overline{Im(A)} = E$
5. احسب $\sigma(A)$.

تمرين 4. 1. ليكن المؤثر

$$\begin{aligned} A: \quad E = \mathbb{L}^2(\mathbb{R}) \longrightarrow & \ \mathbb{L}^2(\mathbb{R}) \\ f \mapsto & \ Af = x.f(x),\ \forall x \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

عين نطاق المؤثر ثم بين انه ليس محدودا.

2. نضع $E = \mathbb{L}^2([a,\ b]); \quad a, b \in \mathbb{R}$ عين نطاق المؤثر ثم برهن انه محدود.
3. نضع $E = \mathcal{C}([a,\ b]); \quad a, b \in \mathbb{R}$ و $\|.\|_E = \|.\|_\infty$ عين نطاق المؤثر ثم برهن انه محدود. احسب طيف المؤثر. نعرف الان المؤثر B من $D(B) = \{u \in E, u' \in E; u(a) = 0\}$ في E حيث $\forall f \in D(B) : \quad B(f) = f'$ بين انه غير محدود واحسب طيفه.

Université du 20 août 1955 Skikda
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques — Dr N. BELLAL
3ème année LICENCE — n.bellal@univ-skikda.dz
Module : Introduction à la théorie des opérateurs linéaires. — 2016/2017

Série de TD N° 3
Théorie spectrale

Exercice 1

Soit $\left(E, \|.\|_E\right)$ un espace de Banach et $A \subset \mathcal{L}(E)$ opérateur borné.

1) Montrer que l'ensemble des valeurs régulières de l'opérateur A noté par $\rho(A)$ constitue un ensemble ouvert de $\mathbb{C}$, déduire que le spectre de A noté par $\sigma(A)$ est fermé.

2) Montrer que si $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $\|A\| < |\lambda|$ alors λ est une valeur régulière de A. Déduire que le spectre de A est fermé.

Exercice 2

On rappelle que:

$$l^2_{\mathbb{N}}(\mathbb{R}) = \left\{ x = \left(x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots\right) \subset \mathbb{R}; \sum_{n \leq 1} |x_n|^2 < \infty \right\}$$

est un espace de Hilbert muni du produit scalaire:

$\forall x, y \in l^2(\mathbb{R})_{\mathbb{N}} : \left\langle x, y \right\rangle = \sum_{n \geq 1} x_n y_n$

de norme: $\|x\|^2 = \sum_{n \geq 1} |x_n|^2$.

On définit l'opérateur:

$A : \quad l^2_{\mathbb{N}}(\mathbb{R}) \to l^2_{\mathbb{N}}(\mathbb{R})$

$x = \left(x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots\right) \mapsto Ax = \left(0, x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots\right)$

1) Montrer que: $\forall x \in l^2_{\mathbb{N}}(\mathbb{R}) : \|Ax\| = \|x\|$, déduire que: $\|A\| = 1$ et A est injectif. Est-que l'opérateur est surjectif? Où se trouve le spectre de A?

2) Calculer le spectre de A.

Exercice 3

Soit $E = l^2$, $(\lambda_n)_{n \geq 1}$ une suite bornée dans $\mathbb{C}$ et $M = \sup_n |\lambda_n|$. Soit

$T : l^2 \to l^2$ définie par : $T\,x = y$, avec $y = \left(\lambda_n\, x_n\right)_{n \geq 1}$ si $x = (x_n)_{n \geq 1} \in E$.

1) Montrer que T est linéaire, continue, et calculer sa norme.

2) Montrer que si l'ensemble $\left\{|\lambda_n|,\ n \geq 1\right\}$ est minoré par un nombre strictement positif, alors T est bijective.

Préciser dans ce cas T^{-1} et déterminer sa norme.

3) On suppose que l'un des λ_n est nul. Montrer que T n'est ni injective ni surjective et que $\overline{\mathrm{Im}(T)} \neq E$.

4) On suppose que $\forall n \geq 1,\ \lambda_n \neq 0$ et $\inf\left(|\lambda_n|,\ n \geq 1\right) = 0$. Montrer que T est injective mais non surjective et que $\overline{\mathrm{Im}(T)} = E$.

5) Quel est le spectre de T?

Exercice 4

1) Soit l'opérateur

$$A :\ E = L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R})$$
$$f \mapsto Af = x.f(x),\ \forall x \in \mathbb{R}$$

Déterminer le domaine de l'opérateur et montrer qu'il n'est pas borné.

2) On pose $E = L^2\left(\left[a,\ b\right]\right);\ a,\ b \in \mathbb{R}$ déterminer le domaine de l'opérateur et montrer qu'il est borné.

3) On pose $\left(E,\ \|.\|_\infty\right) = \left(C\left(\left[a,\ b\right],\ \mathbb{R}\right),\ \|.\|_\infty\right);\ a,\ b \in \mathbb{R}$ déterminer le domaine de l'opérateur et montrer qu'il est borné. Calculer le spectre de l'opérateur.

On définit à présent l'opérateur B de $D(B) = \left\{u \in E,\ u' \in E;\ u(a) = 0\right\}$ à valeur dans E tel que $\forall f \in D(B) :\ B(f) = f'$ montrer qu'il n'est pas borné et calculer son spectre.